Một số áp dụng của phương pháp phân hoạch tập hợp

Trịnh Đào Chiến

Trường Cao Đẳng Sư Phạm Gia Lai

Phương pháp phân hoạch tập hợp đôi khi rất hữu hiệu trong việc giải một số bài toán khó, đặc biệt đối với bài toán Số học. Bài viết đề cập đến phương pháp này, thông qua một số ví dụ đơn giản. Một số bài toán khó hơn sẽ được giới thiệu trong mục Bài tập, dành cho các bạn học sinh khá giỏi.

1. Khái niệm

Các tập hợp khác rỗng $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ được gọi là một *phân hoạch* của tập hợp A nếu:

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, \\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\},\ i \neq j. \end{cases}$$

Mỗi tập con A_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ được gọi là một *thành phần của phân hoạch.*

2. Áp dụng giải toán

2.1. Dạng toán yêu cầu nêu phân hoạch của tập hợp

Một số bài toán, phân hoạch tập hợp là yêu cầu trong đề bài. Sau đây là một số ví dụ.

Bài toán 1. *Giả sử c là số hữu tỉ dương và khác 1. Chứng minh rằng có thể phân hoạch tập các số nguyên dương thành hai tập khác nhau A, B sao cho $\dfrac{x}{y} \neq c$ với mọi x, y cùng nằm trong A hoặc cùng nằm trong B.*

Giải. Đặt $c = \dfrac{p}{q}$, với p và q là hai số nguyên tố cùng nhau.

Trước hết ta thấy rằng số không chia hết cho p và không chia hết cho q thì đặt thêm chúng thuộc A hoặc B đều được, vì không ảnh hưởng gì đến tính chất của 2 tập hợp này để thỏa mãn điều kiện của bài toán đặt ra.

Bây giờ xét các số chia hết cho p hoặc q. Chúng có dạng kp^mq^n, với k không chia hết cho p và q. Ta chia các số đó thành các nhóm dựa theo bậc $(m+n)$ của chúng.

Vấn đề còn lại là cần tiếp tục phân các số có cùng bậc vào các tập hợp khác nhau, vì chính những số này, nếu ở chung một tập hợp thì có thể xảy ra trường hợp $\dfrac{x}{y} = c$.

Nhận xét rằng, để thỏa mãn điều kiện của bài toán, ta cần tránh thương $\frac{x}{y}$ có kết quả mà trong đó p có bậc 1, vì lúc đó có thể $\frac{x}{y} = \frac{p}{q} = c$. Do đó, ta chỉ cần phân các số có cùng bậc mà bậc p chẵn vào một tập hợp còn bậc p lẻ vào một tập hợp khác.

Ví dụ với bậc 5: nếu kp^2q^3, kp^4q, kq^5 thuộc tập hợp A thì kpq^4, kp^3q^2, kp^5 thuộc tập hợp B (với k không chia hết cho p và q), ...

Theo cách chia như trên ta thấy, đã phân hoạch được toàn bộ tập hợp các số nguyên dương thành hai tập hợp thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 2. *Tìm số các phân hoạch tập hợp $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ thành ba tập con A_1, A_2, A_3 (các tập này có thể là tập rỗng) sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*
1) Sau khi sắp xếp các phần tử của A_1, A_2, A_3 theo thứ tự tăng dần, thì hai phần tử liên tiếp luôn có tính chẵn, lẻ khác nhau.
2) Nếu cả ba tập A_1, A_2, A_3 đều không rỗng, thì có đúng một tập có số nhỏ nhất là số chẵn.

Giải. Ta có thể giả thiết thêm:

3) $1 \in A_1$ *và số nhỏ nhất trong* A_2 *bé hơn số nhỏ nhất trong* A_3.

Ta xây dựng các phân hoạch bằng cách xếp lần lượt các số $1, 2, ..., n$ vào A_1, A_2, A_3 theo các điều kiện 1), 2) và 3).

Ta có $1 \in A_1$, còn số 2 có hai khả năng: $2 \in A_1$ hoặc $2 \in A_2$ (do 3)).

Nếu A_2 và A_3 còn là tập hợp rỗng, thì các số tiếp theo, do điều kiện 3), đều chỉ có hai cách sắp xếp: vào A_1 hoặc A_2.

Sau khi phần tử đầu tiên của A_2 được xếp, thì số tiếp theo chỉ có hai cách xếp: A_2 hoặc vào A_3 (vì số đó có cùng tính chẵn, lẻ với phần tử cuối của A_1 lúc đó). Khi A_3 còn là tập hợp rỗng thì, do điều kiện 1), 2), các số tiếp theo cũng chỉ có hai cách xếp vào hai trong ba tập A_1, A_2, A_3.

Sau khi phần tử đầu tiên của A_3 được xếp, ta có thể chứng minh tiếp bằng phép quy nạp rằng, mỗi số luôn có thể và chỉ có thể xếp vào hai trong ba tập A_1, A_2, A_3.

Thật vậy, giả sử đến một bước nào đó, số k có thể xếp vào một trong hai tập A_{i_1}, A_{i_2} và không thể xếp vào A_{i_3}, với $(i_1,\ i_2,\ i_3)$ là một hoán vị nào đó của $(1,\ 2,\ 3)$, nghĩa là k khác tính chẵn, lẻ với hai số cuối của A_{i_1}, A_{i_2}, và cùng tính chẵn, lẻ với số cuối của A_{i_3} lúc đó. Giả sử ta xếp k vào A_{i_1} thì ở bước tiếp theo, số $k+1$ chỉ có thể xếp vào A_{i_1} hoặc A_{i_3} (do điều kiện 1)), nghĩa là cũng có đúng hai khả năng sắp xếp đối với $k+1$.

Tóm lại, với mỗi số trong tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, trừ số 1, đều cho ta hai khả năng sắp xếp.

Vậy có 2^{n-1} phân hoạch tập $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ vào ba tập $A_1,\ A_2,\ A_3$ theo yêu cầu của bài toán.

Bài toán 3. *Cho tập hợp M gồm n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$. Xét tất cả các tập hợp con T_i khác rỗng của M. Gọi s_i là tổng các số thuộc một tập hợp con T_i nói trên. Chứng minh rằng có thể chia tập hợp tất cả các số s_i được thành lập như vậy thành n tập hợp con khác rỗng không giao nhau sao cho tỉ số của hai số bất kỳ thuộc cùng một tập hợp con vừa được phân chia không vượt quá* 2.

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$.

Đặt $S_0 = 0,\ S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m\ (1 \le m \le n)$.

Gọi $P = \{s_i \mid T_i \subseteq M\}$.

Kí hiệu $P_m = \{s \in P \mid S_{m-1} < s \le S_m\}$, với $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Ta chứng minh rằng cách chia P thành các tập P_m như trên thỏa mãn điều kiện bài toán. Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh rằng, nếu $b \in P_m$ thì $2b > S_m$.

Thật vậy, do $b > S_{m-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}$ và $b = \sum\limits_{k=1}^{h} a_{i_k}$, nên phải tồn tại $i_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ h)$ sao cho $i_k \ge m$.

Vậy $b \ge a_{i_k} \ge a_m = S_m - S_{m-1} > S_m - b$ hay $2b > S_m$ (điều phải chứng minh).

2.2. Dạng toán giải bằng phương pháp phân hoạch tập hợp

Một số bài toán khó, đôi khi lời giải khá độc đáo nhờ áp dụng phương pháp phân hoạch tập hợp. Sau đây là một số ví dụ.

Bài toán 4. *Cho A là tập hợp gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có k phần tử của tập hợp A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.*

Giải. Giả sử k là số nguyên dương sao cho trong mỗi tập con có k phần tử của tập hợp A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Xét tập con T gồm tất cả các số chẵn thuộc tập A. Dễ thấy T có 8 phần tử và với a, b tùy ý thuộc T luôn có $a^2 + b^2$ là một hợp số. Từ đó suy ra $k \ge 9$.

Bằng cách tính và kiểm tra trực tiếp tất cả các tổng $a^2 + b^2$, với $a,\ b \in A$, ta được một phân hoạch gồm 8 tập con của tập A mà mỗi tập con gồm hai phần tử là hai số có tổng bình phương là một số nguyên tố:

$$A = \{1,\ 4\} \cup \{2,\ 3\} \cup \{5,\ 8\} \cup \{6,\ 11\} \cup \{7,\ 10\} \cup \{9,\ 16\} \cup \{12,\ 13\} \cup \{14,\ 15\}.$$

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 9 phần tử tùy ý của tập A phải có hai phần tử thuộc cùng một tập con trong phân hoạch nêu trên. Nói cách khác, trong mỗi tập con có 9 phần tử của tập A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Từ các kết quả trên, ta suy ra $k_{min} = 9$.

Bài toán 5. *Cho p và q là hai số nguyên tố lẻ nguyên tố cùng nhau. Chứng minh*

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right] + \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right] = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

Giải. Giả sử

$$A = \left\{(i;j)\middle| 1 \le i \le \frac{p-1}{2},\ 1 \le j \le \frac{q-1}{2}\right\}.$$

Khi đó

$$|A| = \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}\right).$$

Ta phân hoạch tập A thành các tập hợp

$$A_1 = \{(i;j) \mid qi > pj\},\ A_2 = \{(i;j) \mid qi < pj\},\ A_3 = \{(i;j) \mid qi = pj\}.$$

Ta có $|A_3| = 0$. Mặt khác

$$|A_1| = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right],\ |A_2| = \sum_{j=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{jp}{q}\right].$$

Vì $|A| = |A_1| + |A_2|$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6. *Đối với mỗi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, hãy tìm số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ lớn nhất thỏa mãn điều kiện: trong tập gồm n phần tử có thể chọn ra được k tập con khác nhau, mà hai tập bất kỳ trong các tập con này đều có giao khác rỗng.*

Giải. Giả sử $X = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$.

1) Chứng minh $k \ge 2^{n-1}$: Ta cố định phần tử a_1 và chỉ xét các tập con $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k$ có chứa a_1. Khi đó, số tập con này bằng đúng số tập con của tập $\{a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\}$ mà $\forall i,\ j\ (1 \le i,\ j \le k)$ đều có $a_1 \in A_i \cap A_j$, nên $k \ge 2^{n-1}$.

2) Chứng minh $k \le 2^{n-1}$: Giả sử chọn được $k > 2^{n-1}$ tập con của tập X, mà giao của hai tập bất kỳ trong các tập được chọn ra đều khác rỗng.

Chia tất cả 2^n tập con của tập X thành 2^{n-1} cặp sao cho trong mỗi cặp đều gồm tập con và phần bù của nó. Vì số tập con chọn ra lớn hơn 2^{n-1} nên theo Nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất hai tập con đã chọn ra lập thành một cặp. Do đó giao của hai tập này bằng rỗng, mâu thuẫn với tính chất của các tập đã chọn ra. Vậy $k \le 2^{n-1}$.

Tóm lại, số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn điều kiện bài toán là: $k = 2^{n-1}$.

Bài toán 7. *Khai triển $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^{10}$, ta được đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$. Tính $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$.*

Giải. Trước hết, ta chứng minh kết quả sau

Bổ đề. *Cho hai số tự nhiên n, k. Xét tập hợp:*

$$H_{n,k} = \{(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n) \mid x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{N},\ x_0 + x_1 + \dots + x_n = k\}.$$

Thế thì, ta có: $|H_{n,k}| = C^n_{n+k}$.

Chứng minh Ta chứng minh bổ đề trên bằng phương pháp quy nạp theo n.

Khi $n = 0$ thì $H_{0,k} = \{k\}$, $|H_{0,k}| = 1 = C^0_k$: khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến $n - 1$, $n \geq 1$.

Xét phân hoạch $H_{n,k} = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_k$, trong đó $(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n) \in B_j$ nếu $x_n = j$, với $j \in \{0,\ 1,\ \dots,\ k\}$. Theo quy nạp ta có:

$$|B_j| = |H_{n-1,k-j}| = C^{n-1}_{n-1+k-j},\ \forall j = 0,\ 1,\ \dots,\ k.$$

Dùng công thức $C^{i-1}_m + C^i_m = C^i_{m+1}$, ta có

$$|H_{n,k}| = \sum_{j=0}^{k} |B_j| = \sum_{j=0}^{k} C^{n-1}_{n-1+k-j} = \sum_{j=0}^{k} (C^n_{n+k-j} - C^n_{n-1+k-j}) = C^n_{n+k}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Lưu ý: $|H_{n,k}| = C^n_{n+k} - C^n_{n-1} = C^n_{n+k}$, với quy ước rằng $C^n_{n-1} = 0$.

Trở lại với bài toán ở dạng tổng quát sau:

Với m, $n \in \mathbb{N}$, khai triển $f(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^m)^{n+1}$ được đa thức

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m(n+1)} x^{m(n+1)}".$$

Viết cụ thể khai triển của $f(x)$, ta có

$$a_i = |H_{n,i}| = C^m_{n+i},\ \forall i = 0,\ 1,\ \dots,\ m,$$

($|H_{n,i}| > a_i$, nếu $i \geq m + 1$).

Nói riêng

$$a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{i=0}^{m} C^n_{n+i} = \sum_{i=0}^{m} (C^{n+1}_{n+1+i} - C^{n+1}_{n+i}) = C^{n+1}_{n+1+m}.$$

Bài toán đã cho là trường hợp $n + 1 = m = 10$. Do đó $S = C^{10}_{20}$.

Bài toán 8. *Cho số nguyên $n \geq 2$. Gọi S là tập hợp gồm n phần tử và A_i ($1 \leq i \leq m$) là các tập con khác nhau và gồm ít nhất hai phần tử của S sao cho từ các quan hệ $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, $A_i \cap A_k \neq \varnothing$, $A_j \cap A_k \neq \varnothing$, ta suy ra được $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$. Chứng minh rằng: $m \leq 2^{n-1} - 1$.*

Giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n.

Hiển nhiên, phát biểu ở đề bài đúng khi $n = 2$.

Giả sử $n > 2$ và phát biểu đúng với mọi số nguyên bé hơn n.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Không tồn tại i và j nào để $A_i \cup A_j = S$ và $|A_i \cap A_j| = 1$.

Gọi x là phần tử tùy ý thuộc S. Số tất cả các tập A_i không chứa x lớn nhất bằng $2^{n-2} - 1$ theo giả thiết quy nạp. Số các tập con chứa x của S là 2^{n-1}. Nếu $x \in A_i$ thì sẽ không có j nào để cho $A_j = (S \setminus A_i) \cup \{x\}$, bằng không thì phải có $|A_i \cap A_j| = 1$.

Do vậy, quá lắm là một nửa các tập con chứa x của S xuất hiện dưới dạng các tập A_i. Như thế, số lớn nhất các tập A_i là $2^{n-2} - 1 + 2^{n-2} = 2^{n-1} - 1$.

Trường hợp 2: Tồn tại một phần tử $x \in S$ sao cho $A_1 \cup A_2 = S$ và $A_1 \cap A_2 = \{x\}$.

Đặt $|A_1| = r + 1$ và $|A_2| = s + 1$. Khi đó $r + s = n - 1$.

Theo giả thiết quy nạp, số lớn nhất của các tập A_i sao cho $A_i \subseteq A_1$ là $2^r - 1$. Tương tự, số lớn nhất của các tập A_i sao cho $A_i \subseteq A_2$ là $2^s - 1$.

Nếu A_i không phải là tập con của A_1 và A_2 thì $A_1 \cap A_i \neq \varnothing,\ A_2 \cap A_i \neq \varnothing$.

Vì $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, nên $A_1 \cap A_2 \cap A_i \neq \varnothing$. Như vậy, ta có $A_1 \cap A_2 \cap A_i = \{x\}$.

Do đó, $A_i = \{x\} \cup (A_i \setminus A_1) \cup (A_i \setminus A_2)$. Ngoài ra, do các tập khác rỗng $A_i \setminus A_1$ và $A_i \setminus A_2$ có thể được chọn tương ứng theo $2^s - 1$ và $2^r - 1$ cách, nên số lớn nhất các tập này là $(2^s - 1)(2^r - 1)$. Cộng thêm các kết quả riêng này vào, ta nhận được số lớn nhất các tập A_i là $2^{n-1} - 1$.

3. Bài tập

Bài 1.

Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$, biết rằng A chứa đúng 5 phần tử và tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho 5.

Hãy nêu bài toán tổng quát.

Bài 2.

Chứng minh rằng tập hợp $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100\}$ có thể được viết thành hợp của 10 tập hợp rời nhau $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{10}$, sao cho mọi A_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 10$, đều có chứa 10 phần tử và tổng giá trị các phần tử của những A_i đó đều bằng nhau.

Hãy nêu bài toán tổng quát.

Bài 3.

Với mỗi số nguyên $r \geq 1$, xác định số nguyên nhỏ nhất $h(r) \geq 1$ sao cho với mỗi cách chia tập hợp $\{1,\ 2,\ \ldots,\ h(r)\}$ thành r tập con đều tồn tại các số nguyên

$a \geq 0,\ y \geq x \geq 1$ sao cho $a + x,\ a + y,\ a + x + y$ thuộc cùng một tập con.

Bài 4.

Với số tự nhiên tùy ý $n > 3$ cho $k = n(n+1)/6$ và tập X_n gồm $n(n+1)/2$ phần tử, trong đó có k phần tử màu xanh, k phần tử màu đỏ, các phần tử còn lại đề màu trắng. Chứng minh rằng có thể chia tập X_n thành n tập con từng cặp không giao nhau $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, sao cho với số m tùy ý $(1 \leq m \leq n)$, tập con A_m gồm đúng m phần tử và các phần tử đều cùng màu.

Bài 5.

Với các tập hợp số X và Y, ta định nghĩa:

$$XY = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}\ \ ;\ \ X^2 = XX.$$

a) Chứng minh rằng tập $\mathbb{Q}^+$ các số hữu tỉ dương có thể phân hoạch được thành 3 tập $A,\ B,\ C$ rời nhau thỏa mãn $BA = B,\ B^2 = C,\ BC = A$.

b) Chứng minh rằng tất cả các lập phương của các số hữu tỉ dương đều thuộc A theo phân hoạch trên.

c) Tìm các phân hoạch $\mathbb{Q}^+ = A \cup B \cup C$ như vậy sao cho không có số nguyên dương n nào, $n \leq 34$, mà n và $n+1$ cùng thuộc A, nghĩa là

$$min\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \in A,\ n+1 \in A\} > 34.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng - *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc* - Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

[2] Trịnh Đào Chiến, Lê Văn Tám - *Sử dụng nguyên lý bù trừ của tập hợp để giải một số dạng toán số học* - Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, số 392 (2/2010).